

Информационные технологии и управление в области безопасности жизнедеятельности

УДК311+519.24+519.25

doi 10.34987/vestnik.sibpsa.2020.18.3.011

Аппроксимация зависимости количества погибших при пожарах в Российской Федерации от возраста виновника пожара

Кайбичев И.Ф.¹, д. ф. – м. н, доцент; Кайбичева Е.И.², к. э. н.

¹ФГБОУ ВО Уральский институт ГПС МЧС России,

²Уральский государственный экономический университет

Аннотация:

Рассмотрены возможности применения моделей Гомперца, Гомперца-Мейкхама, Ферхюльста для аппроксимации зависимости количества погибших в Российской Федерации при пожарах от возраста виновника пожара. Установлено, что наиболее точно эту зависимость объясняет модель Ферхюльста.

Ключевые слова: количество погибших при пожарах, Российская Федерация, возраст виновника пожара, аппроксимация зависимости

Aproximation to dependencies amount ruins at fire in Russian Federation from age of the perpetrator of the fire

Kaibichev I.A.¹, Holder of an Advanced Doctorate (Doctor of Science) in Physico-mathematical Sciences, Docent; Kaibicheva E.I.², Ph.D. of Economic Sciences

¹ The Ural Institute of State Firefighting service of Ministry of Russian Federation for Civil Defense,

² Ural State University of Economics

Abstract:

The possibilities of using Gompertz, Gompertz-Meikham, Ferhulst models to approximate the dependence of the number of deaths in the Russian Federation during fires on the age of the fire culprit are considered. It is established that this dependence is most exactly explained by the Ferhulst model.

Keywords: amount ruins at fire, Russian Federation, age of the perpetrator of the fire, aproximation to dependencies.

К данному времени нет математической модели описывающей зависимость количества погибших при пожарах от возраста их виновника. При этом моделирование зависимости количества умерших от их возраста интересовало многих исследователей. Наиболее известны работы Гомперца [1], Гомперца-Мейкхама [2]. Для моделирования смертности также можно использовать модель роста биологической популяции [3]. При этом количество особей заменим на количество умерших, а время развития популяции на возраст особи.

Рассмотрим возможность применения наиболее известных моделей смертности, роста биологических популяций для аппроксимации зависимости количества погибших при пожарах в Российской Федерации от возраста виновника пожара. Решение этого вопроса может оказаться полезным при разработке профилактических мероприятий при обеспечении пожарной безопасности.

Модель Гомперца

В ограниченном пространстве и защищённой среде, где внешние причины смерти отсутствуют (в лабораторных условиях, в зоопарках или для людей в развитых странах) смертность человека описывается функцией Гомперца [1]:

$$Y(T) = a \times \exp(b \times \exp(c \times T)) \quad (1)$$

Здесь $Y(T)$ – количество смертей, T – возраст человека в момент смерти, a, b, c – некоторые константы.

Функция (1) описывает ситуацию со смертностью в развитых странах после 1950 года. Эта функция также описывает ситуацию с мобильными телефонами. Пока стоимость была высокой, рост количества был медленный, затем наступил период бурного роста, потом наступило насыщение.

Имеющиеся данные по зависимости количества погибших при пожарах в Российской Федерации от возраста виновника пожара [4] для исследования не удобны.

Основная проблема возникает из-за того, что непрерывной функции $Y(T)$, где Y – количество погибших при пожарах, а T – возраст, нет. Эта проблема возникает из-за того, что возраст виновника пожара сгруппирован по интервалам (Таб. 1). Наиболее простой способ решения этой проблемы – ввести дискретную ранговую переменную X которая совпадает с номером возрастного интервала (Таб. 1).

Таблица 1. Количество погибших при пожарах в России по возрастам виновника пожара

№	Возраст виновника	2015	2016	2017	2018
1	0-6	84	60	44	56
2	7-13	7	8	8	12
3	14-15	4	2	2	1
4	16-19	20	17	18	10
5	20-40	1077	924	748	726
6	41-59	2636	2140	1895	1828
7	>60	2051	2048	1857	1914

Например, при $X = 1$ получим возрастной интервал от 0 до 6 лет. Если $X = 2$, то получаем возрастной интервал от 7 до 13 лет. В случае $X = 3$ – интервал от 14 до 15 лет. При $X = 4$ имеем возрастной интервал от 16 до 19 лет. Если $X = 5$, то получаем интервал от 20 до 40 лет. При $X = 6$ – интервал от 41 до 59 лет. Если $X = 7$, то получаем возрастной интервал старше 60 лет. Недостаток состоит в том, что перечисленные возрастные интервалы имеют различную продолжительность. Однако, другой информации нет. Поэтому мы вынуждены работать с имеющимися данными.

Графический анализ данных (Таб. 1) приводит к выводу о нелинейности связи количества погибших при пожарах в России с возрастом виновника пожара (Рис. 1). Полученные кривые напоминают ситуацию роста биологической популяции. Первоначально есть небольшая численность животных. Далее идет медленный рост. Затем наступает всплеск размножения, который переходит в насыщение.

Заметим, что в нашей ситуации есть определенные отличия. Так, количество погибших при пожарах во втором и третьем возрастном периоде падает (Рис.1). Затем при четвертом возрастном периоде начинается быстрый рост, который продолжается до шестого периода. При шестом возрастном периоде для 2015-2017 годов наступал максимум (насыщение), а при седьмом – следовал спад (Рис. 1). Данные 2018 года отличаются отсутствием спада для 7 возрастного периода.

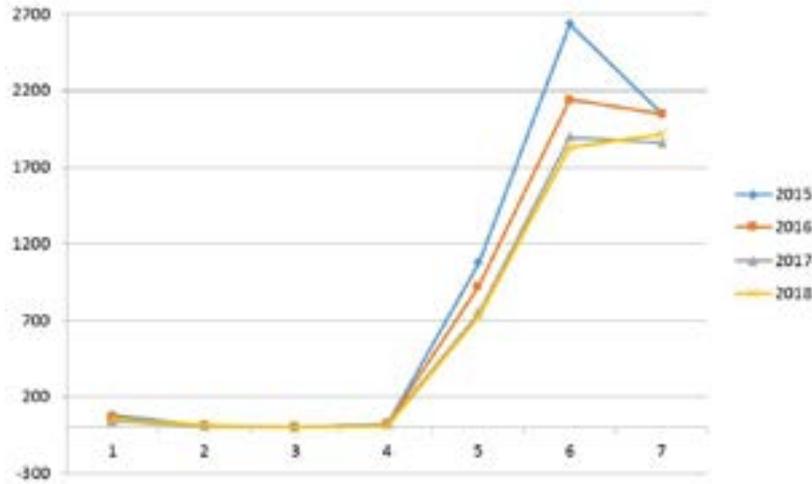


Рис. 1. Количество погибших при пожарах в России по возрасту виновника пожара

Обсудим ограничения на параметры функции Гомперца (1). Поскольку число погибших при пожарах не может быть отрицательной величиной, то получаем ограничение .

Выполним преобразование функции (1)

$$\ln\left(\frac{Y}{a}\right) = b \times \exp(c \times T), \tag{2}$$

$$c \times T = \ln\left[\frac{1}{b} \times \ln\left(\frac{Y}{a}\right)\right] \tag{3}$$

Под знаком первого логарифма в выражении (3) должна стоять положительная величина

$$\frac{1}{b} \ln\left(\frac{Y}{a}\right) > 0 \tag{4}$$

Таким образом, находим, что для констант a, b в модели Гомперца должно выполняться ограничение (4) и условие a>0. В дальнейшем выбирали начальные значения констант a, b, c. По формуле (1) определяли модельные значения . Эти значения, как правило, не совпадают с фактическими количествами погибших Y. Разница e= Y_М-Y дает величину ошибки. Оптимальное решение дает минимум среднего значения квадрата ошибки. Минимум определяли с помощью средства Поиск решения программы Microsoft Excel.

Рассмотрим ранее описанную процедуру более детально на примере данных 2015 года. На первом этапе в электронную таблицу занесли данные 2015 года (Рис. 2). Далее задаем константы. Константа a выберем превышающей максимальное количество погибших на единицу (a = 2637). В этом случае Y/a попадает в диапазон от 0 до 1. Следовательно, ln(Y/a) будет отрицательным. Поэтому константу b для выполнения условия (4) нужно задавать отрицательной. Минимальное значение ln(Y/a) равно -6,4911. Поэтому выбираем b = -7. Затем в столбце G проверяем выполнение условия (4). Далее в столбце H рассчитываем величину ln(ln(Y(a)/b)). Минимальное значение этой величины равно -9,83. Поэтому выбираем константу c = -10.

Далее по формуле (1) рассчитываем модельные значения Y_М (столбец J), ошибку e (столбец K), квадрат ошибки e² (столбец L). Среднее значение ошибки составило 1797, квадрата ошибки – 4284115 (Рис. 2). Коэффициент линейной корреляции Пирсона между фактическими Y и модельными Y_М значениями составил 0,3.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	X	Y	a	b	c	$\ln(y/a)$	$\ln(y/a)/b$	$\ln(\ln(y/a)/b)$	$\ln(\ln(y/a)/b)/c$	Y_m	e	e^2
2	1	84	2637	-7	-10	-3,4466	0,492369	-0,7085276	0,07085276	2636	2552	6513531
3	2	7				-5,9315	0,847355	-0,1656352	0,01656352	2637	2630	6916900
4	3	4				-6,4911	0,9273	-0,07547771	0,00754777	2637	2633	6932689
5	4	20				-4,8817	0,697381	-0,36042382	0,03604238	2637	2617	6848689
6	5	1077				-0,8955	0,127923	-2,05632507	0,20563251	2637	1560	2433600
7	6	2636				-0,0004	5,42E-05	-9,8231177	0,98231177	2637	1	1
8	7	2051				-0,2513	0,035902	-3,32696057	0,33269606	2637	586	343396
9										0,300	1797	4284115

Рис. 2. Первый этап расчета

Выбранные нами значения констант $a = 2637$, $b = -7$, $c = -10$ привели к большой величине среднего значения квадрата ошибки (4284115). Эту величину нужно уменьшить.

На вкладке Данные программы Microsoft Excel есть средство Поиск решения (Рис. 3).

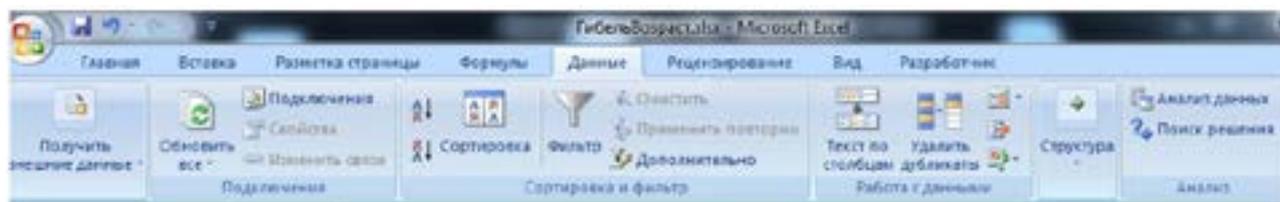


Рис. 3. Вкладка Данные программы Microsoft Excel

На втором этапе нажимаем на кнопку Поиск решения (Рис. 3). В окне Поиск решения (Рис. 4) задаем целевую ячейку (J9). Переключатель устанавливаем в условие поиска минимума. Далее задаем диапазон ячеек (D2:E2), где находятся константы b , c которые мы будем изменять. Затем задаем ограничение $\$G\$2:\$G\$8 \geq 0$ которое соответствует условию (4) и условия отрицательности b и c . Затем нажимаем кнопку Выполнить (Рис. 4).

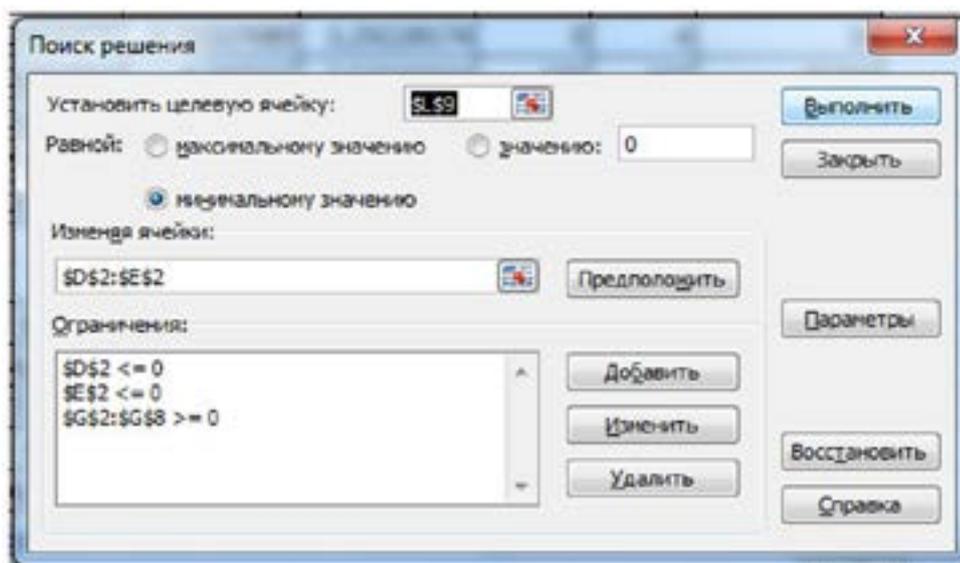


Рис. 4. Окно Поиск решения

Для 2015 года получили аппроксимацию

$$Y_m = a \times \exp[b \times \exp(c \times X)] \quad (5)$$

где $a = 2637$, $b = -396,51082$, $c = -1,25$. Среднее значение ошибки равно 16, а квадрата ошибки – 72198 (Таб. 2).

Таблица 2. Модель Гомперца для 2015 года

X	Y	Y _м	e	e ²
1	84	0	-84	7056
2	7	0	-7	49
3	4	0	-4	14
4	20	180	160	25759
5	1077	1222	145	21066
6	2636	2115	-521	271335
7	2051	2475	424	180105
среднее			16	72198

Коэффициент линейной корреляции Пирсона между фактическими и модельными количества погибших $R = 0,965$. Квадрат этой величины равен $R^2 = 0,93$. Он дает значение коэффициента детерминации модели. В нашем случае модель Гомперца объясняет 93% фактических значений гибели людей при пожарах.

Несмотря на высокое значение коэффициента детерминации модель Гомперца некорректно описывает количество погибших для самых молодых, шестого возрастного интервала, а также людей старшего возраста (Рис. 5).

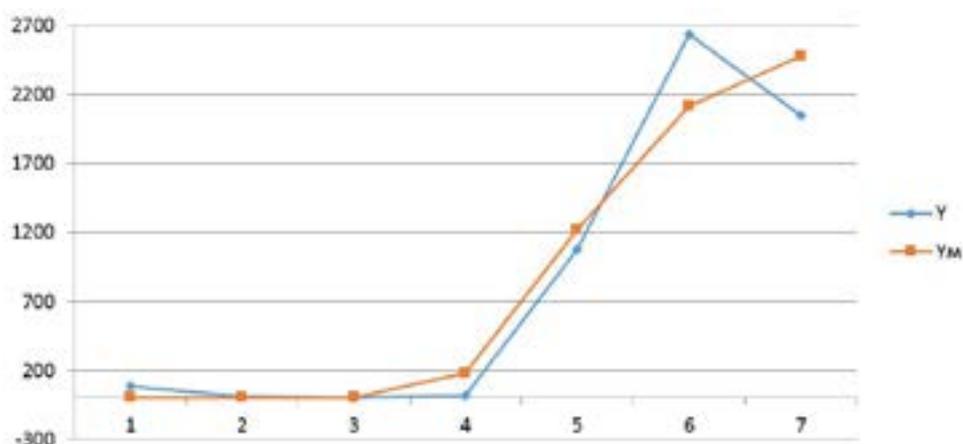


Рис. 5. Сравнение результатов модели Гомперца с фактическими количествами погибших при пожарах для 2015 года

Результаты для 2016 - 2018 годов аналогичны, отличие только в значениях констант a, b, c (Таб. 3).

Таблица 3. Значения констант в модели Гомперца

Год	a	b	c	Среднее значение e ²	R ²
2016	2141	-473,08173	- 1.3	25891	0,97
2017	1896	-541,0209	-1,32	22201	0,97
2018	1915	-559,34653	-1,31	17366	0,98

Отличие данных 2018 года состоит в отсутствии спада для лиц старшего возраста (Рис. 3). Некорректное описание результатов для шестого возрастного периода сохраняется.

В целом модель Гомперца достаточно хорошо аппроксимирует зависимость количества погибших при пожарах в России от возраста виновника пожара. Вместе с тем, модель Гомперца некорректно описывает число погибших в младшем возрасте, возрасте 41-59 лет и старше 60 лет. Поэтому целесообразно рассмо-

треть другие модели.

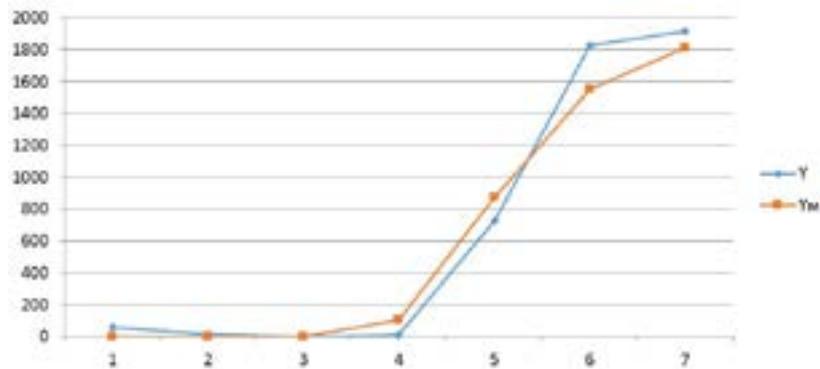


Рис. 6. Сравнение результатов модели Гомперца с фактическими количествами погибших при пожарах для 2018 года

Модель Гомперца-Мейкхама

Согласно закону Гомпертца— Мейкхама, смертность является суммой независимого от возраста компонента (члена Мейкхама, задается константой d) и компонента, зависящего от возраста (функция Гомпертца, член), который возрастает с возрастом и описывает старение организма [3]:

$$Y(T) = a \times \exp(b \times k^{c \times T} + d) \quad (6)$$

Здесь a, b, c, d, k – некоторые константы, T – возраст человека.

В защищённых средах, где внешние причины смерти отсутствуют (в лабораторных условиях, в зоопарках или для людей в развитых странах) независимый от возраста компонент часто становится малым, и формула упрощается до функции Гомпертца.

Закон смертности Гомпертца — Мейкхама хорошо описывает динамику смертности человека в диапазоне возраста 30—80 лет. В области большего возраста смертность не возрастает так быстро, как предполагает этот закон смертности.

До 1950-х годов смертность людей была в большей мере вызвана независимым от времени компонентом закона смертности (членом или параметром Мейкхама), тогда как зависящий от возраста компонент (функция Гомпертца) почти не изменялась. После 1950-х годов картина изменилась, смертность в позднем возрасте снизилась и кривая выживания сгладилась.

Попытка применения закона Гомперца-Мейкхама к данным о гибели людей при пожарах дает аппроксимацию

$$Y_m = a \times \exp(b \times k^{c \times X} + d) \quad (7)$$

где $a = 2637, b = -396,51082, c = -1,25, d = -0,0228, k = 0,994$. Среднее значение ошибки равно 9, а квадрата ошибки – 71693 (Таб. 4).

Таблица 4. Модель Гомперца-Мейкхама для 2015 года

X	Y	Ym	e	e ²
1	84	0	-84	7056
2	7	0	-7	49
3	4	0	-4	14
4	20	193	173	29837
5	1077	1233	156	24292
6	2636	2090	-546	298309

7	2051	2428	377	142294
			9	71693

Сравнение результатов модели Гомперца-Мейкхама с фактическими данными по гибели людей при пожарах для 2015 года показали удовлетворительное описание ситуации для первых пяти возрастных периодов виновника пожара (Рис. 4). Для людей в возрасте 41 – 59 лет и больше 60 лет модель Гомперца-Мейкхама дает результаты, заметно отличающиеся от фактических.

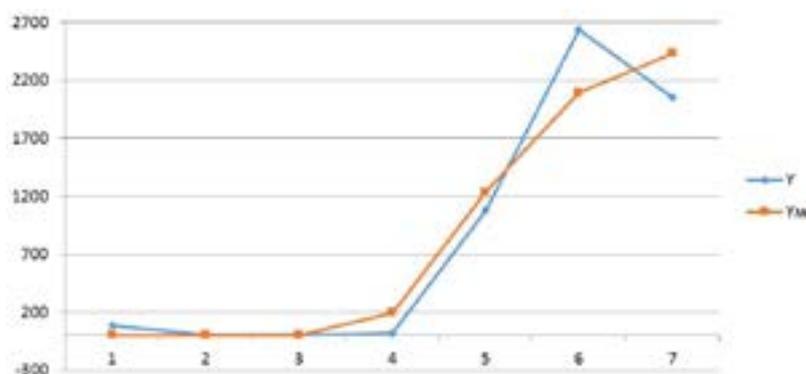


Рис. 7. Сравнение результатов модели Гомперца-Мейкхама с фактическими количествами погибших при пожарах для 2015 года

Коэффициент линейной корреляции Пирсона между модельными и фактическими значениями $R = 0,965$. Коэффициент детерминации модели равен квадрату этой величины $R^2 = 0,93$. Отсюда можно сделать вывод, что модель Гомперца-Мейкхама дает правильное описание 93% зависимости фактического числа погибших от возраста виновника пожара.

Результаты для 2016 - 2018 годов аналогичны, отличие только в значениях констант a, b, c, d, k (Таб. 5).

Таблица 5. Значения констант в модели Гомперца-Мейкхама

Год	a	b	c	d	k	Среднее значение e^2	R^2
2016	2141	-473,08173	-1,3	0,10715	2,64324	17883	0,98
2017	1896	-541,0209	-1,32	0,12976	2,6217	13174	0,98
2018	1915	-559,34653	-1,31	0,13516	2,62665	7903	0,99

Отличие данных 2018 года состоит в отсутствии спада для лиц старшего возраста (Рис. 8). Некорректное описание результатов для лиц возраста 41 – 59 лет сохраняется.

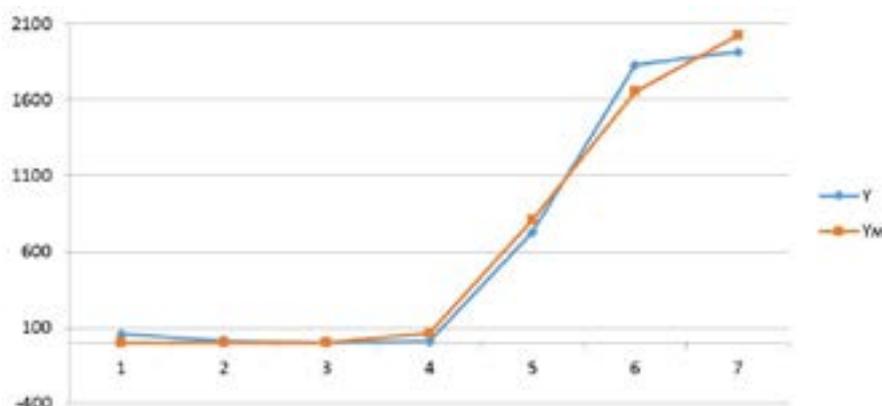


Рис. 8. Сравнение результатов модели Гомперца-Мейкхама с фактическими количествами погибших при пожарах для 2018 года

В целом модель Гомперца-Мейкхама дает более удачную аппроксимацию зависимости количества по-

гибших при пожарах в России от возраста виновника пожара. Однако она некорректно описывает число погибших в возрасте 41-59 лет. Поэтому целесообразно рассмотреть другие модели.

Модель Ферхюльста

Количество особей $P(t)$ в популяции описывается функцией Ферхюльста [4]:

$$P(t) = \frac{K \times P_0 \times G}{K + P_0 \times (G - 1)}, G = \exp(r \times t) \quad (8)$$

где P_0 – начальная численность популяции, K – емкость среды (максимальная численность популяции), r – скорость размножения, t – время.

При аппроксимации количества погибших при пожарах смысл констант в уравнении (8) меняется. Так P_0 – минимальное количество погибших при пожарах. Полагаем $P_0 > 1$. Если положить $P_0 = 0$, то и все остальные значения $P(t) = 0$, а этого не наблюдается. Далее K – максимальное количество погибших при пожарах. Можно ожидать, что K равно или больше максимального из имеющихся фактических количеств погибших при пожарах. Параметр r – скорость изменения количества погибших при пожарах по мере возрастания возраста виновника. Параметры K и r будут определены подбором. По результату подбора для количества погибших при пожарах в 2015 году будем использовать аппроксимацию

$$Y_M = \frac{K \times P_0 \times G}{K + P_0 \times (G - 1)}, G = \exp(r \times X) \quad (9)$$

где $K = 2313,58$, $P_0 = 2,23 \times 10^{-6}$, $r = 4,130989$. Среднее значение ошибки равно -23, а квадрата ошибки – 29715 (Таб. 6).

Таблица 6. Модель Ферхюльста для 2015 года

X	Y	Y _м	ε	ε ²
1	84	0	-84	7056
2	7	0	-7	49
3	4	1	-3	12
4	20	33	13	169
5	1077	1097	20	381
6	2636	2273	-363	131737
7	2051	2313	262	68601
среднее			-23	29715

Коэффициент линейной корреляции Пирсона между модельными и фактическими значениями $R = 0,986$. Коэффициент детерминации модели равен квадрату этой величины $R^2 = 0,97$. Отсюда можно сделать вывод, что модель Ферхюльста дает правильное описание 97 % зависимости фактического числа погибших от возраста виновника пожара.

Сравнение результатов модели Ферхюльста с фактическими данными по гибели людей при пожарах для 2015 года показали удовлетворительное описание ситуации для первых пяти возрастных периодов виновника пожара (Рис. 9). Для людей в возрасте 41 – 59 лет и старше 60 лет модель Ферхюльста дает результаты, заметно отличающиеся от фактических.

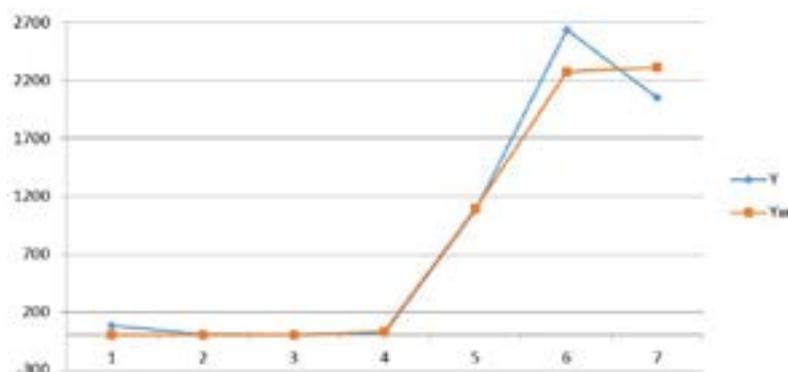


Рис. 9. Сравнение результатов модели Ферхюльста с фактическими количествами погибших при пожарах для 2015 года

Результаты для 2016 - 2018 годов аналогичны, отличие только в значениях констант K , P_0 , r (Таб. 7).

Таблица 7. Значения констант в модели Ферхюльста

Год	K	P_0	r	Среднее значение e^2	R^2
2016	2107,925	$5,12 \cdot 10^{-6}$	3,920494	2060	0,998
2017	1913,672	$6,28 \cdot 10^{-6}$	3,820453	1012	0,999
2018	1912,568	$2,69E-05$	3,516761	556	0,999

Модель Ферхюльста дает минимальную величину среднего значения квадрата ошибки. Поэтому модель Ферхюльста - наиболее удачная аппроксимация зависимости количества погибших при пожарах в России от возраста виновника пожара. Отметим, что для людей в возрасте 41 – 59 лет и старше 60 лет модельные результаты заметно отличны от фактических.

Возникает вопрос о правомерности использования модели Ферхюльста для моделирования зависимости количества смертей. Распространено мнение, что умершие особи из популяции выбывают и не могут оказывать влияние на её развитие. На практике умершие могут быть источниками вирусов и оказывать влияние на рост популяции. Кроме этого, на рост популяции могут оказывать внешние факторы. К числу таких факторов можно отнести ограниченный объем пищи и климатические условия. Поэтому использование модели Ферхюльста для моделирования зависимости количества погибших при пожарах от возраста виновника пожара не противоречит представлениям о развитии биологической популяции.

Из рассмотренных моделей Гомперца, Гомперца-Мейкхама, Ферхюльста наилучшую аппроксимацию зависимости количества погибших при пожарах в России от возраста виновника пожара дает модель Ферхюльста.

Литература

- Gompertz, B. On the Nature of the Function Expressive of the Law of Human Mortality, and on a New Mode of Determining the Value of Life Contingencies// Philosophical Transactions Royal Society (London), 1825, V. 115, p. 51-583.
- Makeham, W.M. On the Law of Mortality and the Construction of Annuity Tables // J. Inst. Actuaries and Assur. Mag., 1860, V. 8, p. 301-310.
- Verhulst, P.F., Recherches Mathématiques sur La Loi D'Accroissement de la Population // Nouveaux Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Bruxelles, 1845, V. 18, Art. 1, p. 1-45, 1845.
- Пожары и пожарная безопасность в 2018 году: Статистический сборник. Под общей редакцией Д.М. Гордиенко. – М.: ВНИИПО, 2019. – 125 с.